

DOI: 10.7652/xjtuxb201905007

燃气轮机拉杆转子非线性动力学特性研究

达琦^{1,2}, 袁奇^{1,2}, 李浦^{1,2}

(1. 西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安;
2. 西安交通大学陕西省叶轮机械及动力装备工程实验室, 710049, 西安)

摘要: 针对燃气轮机组式转子轮盘间存在的非线性刚度对转子动力学特性产生的特殊影响,对比研究了关于拉杆转子三次方和双线性两种非线性刚度模型的 dynamics 特性;首先,基于双圆盘拉杆转子模型,通过三维有限元法计算得到其弯曲刚度随转角的变化规律;然后,采用三次方模型拟合非线性刚度,建立拉杆转子无量纲控制方程,并基于谐波平衡法和 Broyden 迭代优化算法计算稳态响应,进而分析系统参数对非线性响应的影响规律;最后,基于双线性刚度模型对比研究拉杆转子非线性响应。研究结果表明,两种模型均能模拟转子升降速过程中的幅值突变效应,但两种模型发生振幅突跳现象的原因不同,且在响应不稳定区域附近的动力学特性不同;三次方刚度模型对这种非线性现象的描述更加准确,其数值模拟结果具有更加丰富的非线性动力学行为;为避免突跳现象对转子系统造成的不良影响,通过调整非线性系统的特定参数能够改变幅频响应曲线中不稳定区域的位置,进而有效避免转子系统工作在不稳定的频率范围内。

关键词: 拉杆转子;非线性刚度;谐波平衡法;Broyden 算法

中图分类号: O322 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2019)05-0043-09

Nonlinear Dynamic Characteristics of a Rod-Fastened Rotor System

DA Qi^{1,2}, YUAN Qi^{1,2}, LI Pu^{1,2}

(1. School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;
2. Shaanxi Engineering Laboratory of Turbomachinery and Power Equipment, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: The nonlinear bending stiffness of a rod-fastened rotor varies with the applied loads to significantly influence the dynamic characteristics. In this paper, cubic and bi-linear models are both adopted to perform a comparative analysis on the nonlinear dynamic characteristics of a rod-fastened rotor system. First, the bending stiffness of the rod-fastened rotor system with two disks is obtained using a 3D FEM model. Then, a cubic stiffness model is applied to approximate the nonlinear stiffness, and subsequently the corresponding governing equation is derived. The harmonic balance method(HBM) and iterative optimization method based on Broyden algorithm are adopted to get the steady-state response. Besides, the influences of different parameters on rotor dynamics are further investigated. Finally, a bilinear stiffness model is utilized to conduct the comparative analysis on the dynamic response of the rod-fastened rotor system. The results show that both models can be used to demonstrate the amplitude jump behavior of the rotor system. However, these two models have different explanations on amplitude jump, so that the dynamic characteristics are different near the unstable region, and the cubic model has a more

收稿日期: 2018-11-04。 作者简介: 达琦(1995—),男,硕士生;袁奇(通信作者),男,教授,博士生导师。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11372234);西安交通大学自然科学基金重点资助项目(ZRZD2017025)。
网络出版时间: 2019-03-01 网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20190301.1151.004.html>

abundant nonlinear behavior than that of the bi-linear model. The results also show that, by adjusting the nonlinear system parameters, the position of the unstable region in the amplitude-frequency response curve can be changed, thereby effectively preventing the rotor system from operating in an unstable frequency region.

Keywords: rod-fastened rotor; nonlinear flexural stiffness; harmonic balance method; Broyden algorithm

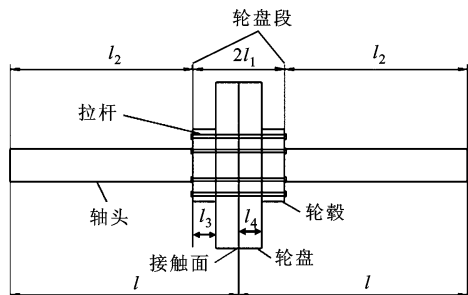
拉杆转子常用于重型燃气轮机和航空发动机,通过在中心或周向拉杆螺栓上施加预紧力来保证多级轮盘之间的相对静止并使轮盘段具有一定刚度。然而,即使受到较小的弯曲外载荷,转子轮盘接触面仍会部分区域脱开^[1],导致接触面积减小进而造成转子整体刚度下降。文献[2]对某航空发动机的鼓筒式转子接触段刚度进行研究,结果表明轮盘之间的相对转角随弯矩线性增加呈现出非线性的变化规律。在建立具有螺栓连接结构的航空发动机转子力学模型时,常采用角刚度分段线性模型来近似连接部位的刚度变化规律^[3]。与连续转子相比,角刚度分段线性模型的动力学响应与线性模型的动力学响应存在较大差异。为了解释组合转子升速和降速中存在的振幅突跳现象,有学者综合考虑轮盘接触面和拉杆刚度的共同作用,建立具有三次方刚度的转子模型^[4-5]。拉杆转子的特殊结构使得连接段刚度具有非线性的变化规律,且组合式转子多个轮盘之间的接触模式可能不同,因而其动力学响应十分复杂^[6];在特定条件下,幅频响应中出现的线性系统所不具有的双稳态现象使得转子故障频发,造成了巨大的经济损失。对于非线性转子系统出现的振幅突跳现象,国内外学者从不同角度进行研究^[4,7-10],将其视为转子系统的一种故障,并尽量设法避免。目前国内对于拉杆转子非线性振动特性研究较少,以往的文献均采用刚度硬化模型,即整体刚度随转速增加而增加,对于幅频响应中出现的振幅突跳现象无一致结论,且现有分析模型缺乏依据。

针对以上问题,本文首先利用三维非线性有限元方法计算得到拉杆与接触面等效刚度随轮盘横向间距的变化规律;然后分别采用双线性模型和三次方模型拟合非线性刚度曲线,建立两种拉杆转子力学模型;最后通过数值仿真分析,对两组模型幅频响应中出现的非线性振动现象进行了对比研究,进而分析不同系统参数对转子振动特性的影响。

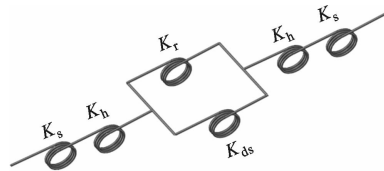
1 拉杆转子横向刚度分析

图1为周向拉杆组合式转子模型,该模型由轴

头、轮毂、轮盘、拉杆和接触面组成, l_3 、 l_4 分别为轮毂和轮盘的轴向长度, $2l_1$ 表示轮毂和轮盘总长度, l_2 为轴头长,模型总长为 $2l$ 。将轮盘接触面和拉杆的刚度一并考虑, K_s 、 K_h 、 K_{ds} 、 K_r 分别表示轴头、轮毂、轮盘和拉杆的抗弯刚度。



(a) 拉杆转子示意图



(b) 转子弯曲刚度模型

图1 周向拉杆组合式转子

转子轮盘段的刚度可表示为

$$K_c = \left(\frac{1}{K_h} + \frac{1}{K_{ds} + K_r} \right)^{-1} \quad (1)$$

利用弯矩-转角关系和有限元软件计算轮盘段的抗弯刚度

$$K_{ij} = \frac{M_j}{\varphi_i} \quad (2)$$

K_{ij} 表示在 j 方向上引起转子在 i 方向上产生单位转角所施加的弯矩。

为简化分析,认为转子各向同性,并不计交叉方向上的刚度,弯曲刚度可以表示为

$$K_{ij} = \delta_{ij} \frac{M_j}{\varphi_i} \quad (3)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (4)$$

式中 δ_{ij} 为克罗内克函数。利用式(3)可以在三维有限元软件 ANSYS 中求出轮盘段的抗弯刚度 K_c ,然

后将 K_c 代入式(1)计算得到 K_r 。

用力矩-面积法求轮盘段的横向刚度

$$K_{cl} = \left[\frac{l_3(2l_3 + 3l_4)}{12K_h} + \frac{3l_3^2 - 3l_3l_4 + 4l_4^2}{48(K_{ds} + K_r)} \right]^{-1} \quad (5)$$

利用力矩面积法分别得到轮毂和轮盘的横向刚度 K_{hl} 、 K_{dsl} ，然后根据 K_{cl} 、 K_{hl} 、 K_{dsl} 和 K_{rl} 之间的关系，即可得到拉杆和接触面的等效横向刚度

$$K_{rl} = \left(\frac{1}{K_{cl}} - \frac{1}{K_{hl}} \right)^{-1} - K_{dsl} \quad (6)$$

由于轮盘相对转角很小，认为 $\sin\varphi \approx \varphi$ ，因此两轮盘间距 X 近似表示为 φl ，其中 l 为接触面到轴头的距离，横向位移与转角关系示意图如图 2 所示。

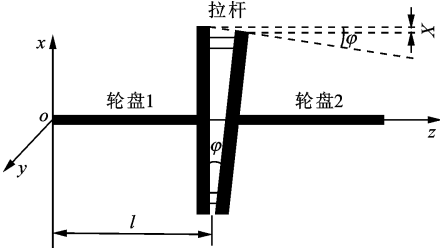


图 2 转子轮盘横向位移与转角关系示意图

等效刚度对应的横向回复力可表示为

$$F_{rl} = K_{rl} X \quad (7)$$

利用有限元软件 ANSYS 建立上述三维有限元模型，如图 3 所示，模型的参数取值如表 1 所示。

表 1 模型转子物理参数

名称	符号	单位	数值
拉杆数目	N		6
拉杆直径	d_r	m	0.012
弹性模量	E	$\text{GN} \cdot \text{m}^{-2}$	206
密度	ρ	$\text{kg} \cdot \text{m}^3$	7 870
质量	m	kg	885.28
阻尼系数	ζ		0.02
拉杆安装半径	r_p	m	0.107 5
转子总长	L	m	2.0
单侧轴长	l_2	m	0.8
单侧轮盘段长	l_1	m	0.2
总预紧力	F_{pre}	kN	120

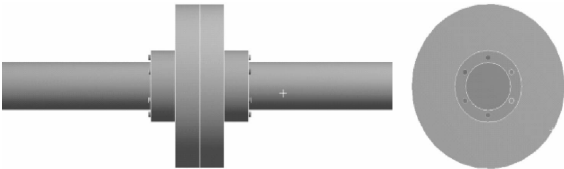


图 3 拉杆转子三维有限元模型

参考文献[11]的方法，利用式(3)计算得到轮盘相对转角 φ 随弯矩 M 变化关系，如图 4 所示，并根据式(5)(6)计算得到等效横向刚度值 $|K_{rl}|$ 随两轮盘间距 X 的变化曲线，如图 5 所示。

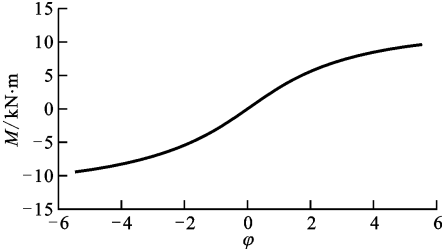


图 4 轮盘间相对转角随弯矩变化关系

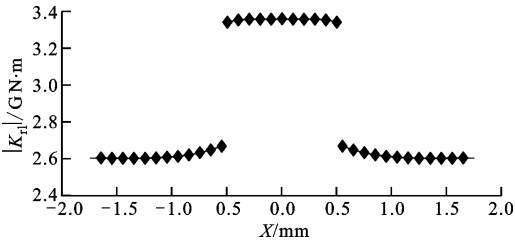


图 5 等效横向刚度随轮盘间距变化曲线

2 转子动力学方程建模

将两轮盘分别简化为质量为 m_1 、 m_2 的刚性圆盘，两盘质量偏心量取相同值且均用 e 表示，偏心量矢量夹角为 θ 。将拉杆和接触面等效为不计质量的抗弯弹簧，回复力用 $F(q)$ 表示，其中 q 为轮盘位移矢量。轮盘段两端分别与不计质量的弹性轴相连，两盘横向刚度分别为 k_1 、 k_2 。左、右端轴和抗弯弹簧的阻尼系数分别表示为 c_1 、 c_2 、 c_3 。转子系统模型如图 6 所示。

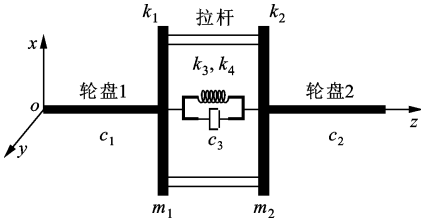


图 6 转子系统模型示意图

模型中单个轮盘的位移矢量表示为

$$q_i = [x_i \ y_i]^T \quad (8)$$

式中 x 、 y 为单个轮盘的自由度。

根据达朗贝尔原理建立系统运动方程

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + c_3 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 + F(x_1 - x_2) = m_1 e \Omega^2 \cos(\Omega t) \quad (9)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 - c_3 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 x_2 - F(x_1 - x_2) =$$

$$m_2 e \Omega^2 \cos(\Omega t + \theta) \quad (10)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + c_1 \dot{y}_1 + c_3 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k_1 y_1 + F(y_1 - y_2) = m_1 e \Omega^2 \sin(\Omega t) \quad (11)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + c_2 \dot{y}_2 - c_3 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k_2 y_2 - F(y_1 - y_2) = m_2 e \Omega^2 \sin(\Omega t + \theta) \quad (12)$$

式中: Ω 为转子角速度; $F(x_1 - x_2)$ 为非线性回复力。记 $\mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ y_1 \ y_2]^T$, 式(9)~(12)的矩阵形式为

$$\mathbf{M}\mathbf{X}'' + \mathbf{C}\mathbf{X}' + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{f}(t, \mathbf{X}) \quad (13)$$

式中

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & m_1 & \\ & & & m_2 \end{bmatrix}; \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & k_1 & \\ & & & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_3 & -c_3 & & \\ -c_3 & c_1 + c_3 & & \\ & & c_1 + c_3 & -c_3 \\ & & -c_3 & c_1 + c_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{X}) = e \Omega^2 \begin{bmatrix} m_1 \cos(\Omega t) \\ m_2 \cos(\Omega t + \theta) \\ m_1 \sin(\Omega t) \\ m_2 \sin(\Omega t + \theta) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F(x_1 - x_2) \\ F(x_2 - x_1) \\ F(y_1 - y_2) \\ F(y_2 - y_1) \end{bmatrix}$$

3 三次方非线性刚度模型

由三维有限元计算结果如图4所示,可知随着接触段载荷的增加,拉杆和接触面等效横向刚度呈非线性变化,其变化趋势可以用三次多项式函数拟合,将回复力表示为

$$F(x) = k_3 x - k_4 x^3 \quad (14)$$

式中: k_3 为接触段的线性刚度; k_4 为轮盘接触面积减小造成两轮盘横向刚度削弱后的刚度。

3.1 模型动力学方程

动力学方程在 x 和 y 方向无耦合,根据控制方程的对称性,只研究 x 方向的横向振动。

令 $\tau = \Omega t$, $x_3 = x_1 - x_2$, $k_1 = \beta_2 k_2 = \beta_3 k_3 = \beta_4 k_4$, 将式(9)~(12)改写为无量纲化形式

$$\left. \begin{aligned} r_2'' + r_3'' + \frac{2\zeta_1}{\lambda}(r_2' + r_3') + \frac{2\zeta_3}{\lambda}r_3' + \frac{1}{\lambda^2}(r_2 + r_3) + \frac{\beta_3}{\lambda^2}r_3 - \frac{\xi}{\lambda^2}r_3^3 &= \cos(\tau) \\ r_2'' + \frac{2\zeta_2}{\alpha\lambda}r_2' - \frac{2\zeta_3}{\alpha\lambda}r_3' + \frac{\beta_2}{\alpha\lambda^2}r_2 - \frac{\beta_3}{\alpha\lambda^2}r_3 + \frac{\xi}{\alpha\lambda^2}r_3^3 &= \cos(\tau + \theta) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中: $r' = \frac{dr}{d\tau}$; $r'' = \frac{d^2r}{d\tau^2}$; $r_i = \frac{x_i}{e}$ ($i = 1, 2, 3$) 为无量纲

幅值; $\alpha = \frac{m_2}{m_1}$ 为轮盘质量比; $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ 为轮盘1的固

有圆频率; $\zeta_i = \frac{c_i}{2m_1\omega_1}$ ($i = 1, 2, 3$) 为无量纲阻尼系

数; $\lambda = \frac{\Omega}{\omega_1}$ 为频率比; $\xi = e^2\beta_4$ 为非线性刚度与线性刚度比值。

利用谐波平衡法近似求解式(13),动态响应形式解为

$$r_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{r}_{kn} e^{in\Omega t}, \quad k = 2, 3 \quad (16)$$

式中 $\hat{r}_{kn}$ 为 r_k 的第 n 次谐波的幅值。由于高阶谐波的幅值极小,因此忽略三阶以上谐波。将式(16)代入式(15),得到微分方程组对应的代数方程组

$$f(r) = \begin{cases} f_1(r_{11}, r_{12}, \dots, r_{16}, r_{21}, r_{22}, \dots, r_{26}) = 0 \\ f_2(r_{11}, r_{12}, \dots, r_{16}, r_{21}, r_{22}, \dots, r_{26}) = 0 \\ \vdots \\ f_{13}(r_{11}, r_{12}, \dots, r_{16}, r_{21}, r_{22}, \dots, r_{26}) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

利用迭代算法求解式(17),可得方程组的近似解。

3.2 非线性代数方程组优化求解算法

3.2.1 Broyden 迭代算法 Broyden 算法具有超线性收敛速度,在一定条件下收敛速度快^[12-13]。迭代过程可表示为

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{r}^{(k)}) \quad (18)$$

$$\mathbf{A}_k \mathbf{s}_k = \mathbf{y}_k \quad (19)$$

式中: $\mathbf{r}^{(k)}$ 为待求解列向量第 k 步的取值; $\mathbf{f}(\mathbf{r}^{(k)})$ 为第 k 步的残差; $\mathbf{s}_k = \mathbf{r}^{(k)} - \mathbf{r}^{(k-1)}$; $\mathbf{y}_k = \mathbf{f}(\mathbf{r}^{(k)}) - \mathbf{f}(\mathbf{r}^{(k-1)})$ 。取 $\mathbf{A}_0 = \mathbf{J}_f(\mathbf{r}^{(0)})$, 并在迭代过程中对 $\mathbf{A}_{k-1}$ 更新

$$\mathbf{A}_k^{-1} = \mathbf{A}_{k-1}^{-1} + \frac{(\mathbf{s}^{(k)} - \mathbf{A}_{k-1}^{-1} \mathbf{y}^{(k)}) \mathbf{s}^{(k)T} \mathbf{A}_{k-1}^{-1}}{\mathbf{s}^{(k)T} \mathbf{A}_{k-1}^{-1} \mathbf{y}^{(k)}} \quad (20)$$

当残差小于误差限时求解收敛。

3.2.2 最小二乘法 使用三阶谐波平衡法对微分方程近似求解将会产生包括12个幅值系数在内的13个代数方程。针对方程组的超静定问题,使用最小二乘法^[12],并设置误差限充分小(取 10^{-10}),以保证求解精度。对矩阵 $\mathbf{A}_k$ 和列向量 $\mathbf{f}(\mathbf{r}^{(k)})$ 左乘 $\mathbf{A}_k^T$ 。采用最小二乘法后的迭代过程表示为

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - (\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k)^{-1} (\mathbf{A}_k^T \mathbf{f}(\mathbf{r}^{(k)})) \quad (21)$$

3.2.3 矩阵条件数缩减方法 待求解的非线性方程组阶数较大,且高阶谐波幅值相对一阶幅值过小,因此 Ω 取值较大时,矩阵 $\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k$ 的条件数往往达到

10^9 量级,使得矩阵求逆极其耗时甚至失败。数值仿真计算表明,条件数与方程组中某些参数取值有关。采用无量纲幅频响应曲线代替幅频响应曲线,能使求解范围等比例缩小,且可自定义待求解的角速度区间,保证求解顺利进行。采用延续性算法对解响应曲线实现连续追踪^[14],并搜索不稳定解,计算流程如图 7 所示。图中 r_0 表示初始迭代值, s 表示转子角速度递进步长, Ω_0 、 Ω_{end} 分别表示扫频起始和终止角速度,泛函 $\text{Norm}()$ 为取括号内表达式的二范数。

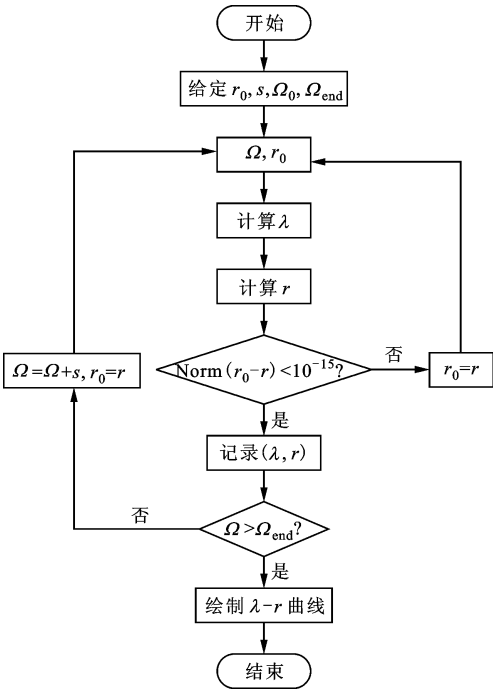


图 7 模型转子幅频曲线计算流程图

3.3 计算结果与分析

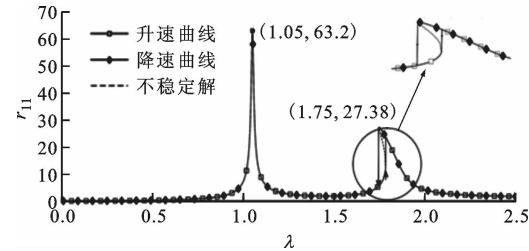
计算时使用系统参数如表 2 所示。根据计算结果绘制拉杆转子在升速和降速过程中的无量纲幅频

表 2 拉杆转子非线性系统参数取值

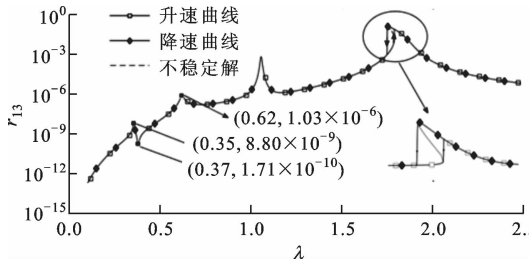
组别	组号	$\theta/^\circ$	$e/\mu\text{m}$	$\zeta_i/10^{-3}$
对照组	1	90	10	5.7
	2	90	11	5.7
e 对比组	3	90	12	5.7
	4	90	13	5.7
	5	60	10	5.7
θ 对比组	6	70	10	5.7
	7	80	10	5.7
	8	90	10	6.0
ζ 对比组	9	90	10	6.3
	10	90	10	6.6

响应曲线,进而改变系统参数,分析不同系统参数对响应曲线的影响。

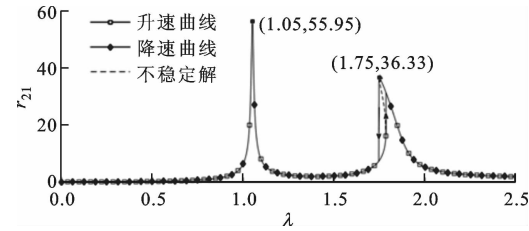
3.3.1 转子升速和降速曲线 取表 2 中第 1 组参数,其余参数 $\alpha=0.75$, $\beta_2=1$, $\beta_3=1$, $\beta_4=5\times 10^5\text{ m}^{-2}$,绘制轮盘质心 x 方向的相对幅值 r 随转子相对转速 λ 变化曲线,如图 8 所示,图中 r_{ij} 表示第 i 个转盘的 j 阶谐波响应。由图 8 可知:无量纲幅频曲线具有一阶、三阶谐波,二阶谐波幅值过小;两轮盘无量纲幅频响应曲线随无量纲转速变化趋势相同,但幅值不同。



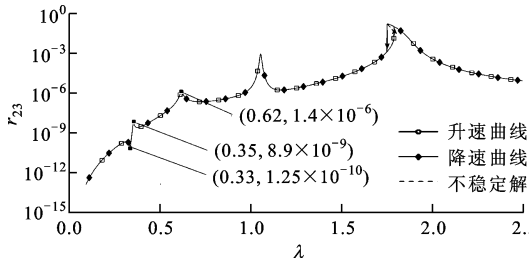
(a) 轮盘 1 升速和降速一阶谐波曲线



(b) 轮盘 1 升速和降速三阶谐波曲线



(c) 轮盘 2 升速和降速一阶谐波曲线



(d) 轮盘 2 升速和降速三阶谐波曲线

图 8 拉杆转子轮盘升速/降速幅频特性曲线

比较 $\beta_4=0$ (即无非线性刚度项)与 $\beta_4=5\times 10^5\text{ m}^{-2}$ 时轮盘 1 的一阶谐波曲线,如图 9 所示,可知非

线性刚度使得转子二阶共振转速发生了明显的变化,但一阶共振转速变化相对不大。

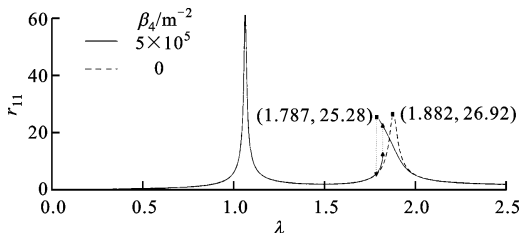


图 9 拉杆转子轮盘 1 一阶谐波对比曲线

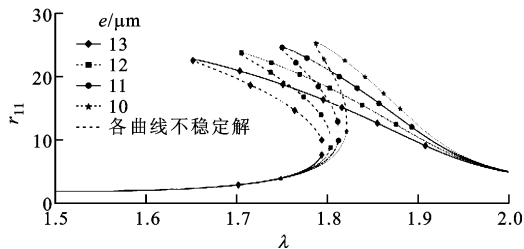
图 8 所示的无量纲幅频曲线在 $\lambda < 1$ 时,三阶谐波曲线的两个共振峰分别对应一阶、二阶固有频率的 $1/3$ 次谐波。次谐波的出现表明三次方刚度模型受到非线性刚度项的影响表现出与线性模型不同的振动响应特性。一阶、三阶谐波曲线均可观察到振幅突跳现象,但升速、降速曲线发生突跳的位置不同。这是因为动力学方程中存在非线性项,使同一转速下的方程存在多解。

根据解的稳定性判断方法^[15],将解分为稳定解和不稳定解。不稳定解不能长期存在,因此随着系统参数的变化,无量纲幅值作为微分方程组的解从单解区域进入不稳定区域(同样也是多解区域)时,会发生从一个稳定解突跳至另一个稳定解的行为。由于系统控制方程只在特定的频率范围存在多解区域,在模拟升速或者降速时,由于进入多解区域时对应的频率不同,使得振幅突跳位置不同。

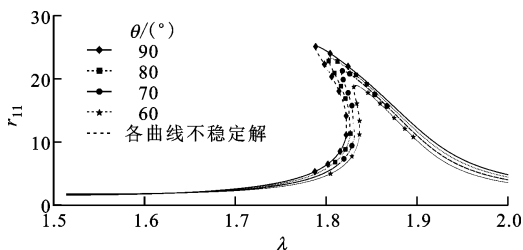
3.3.2 结构参数对振动特性的影响 为分析系统响应出现的振幅突跳现象,有必要研究系统参数对解响应曲线的影响。取表 2 中参数,分别比较偏心量 e 、不平衡量夹角 θ 和无量纲阻尼系数 ζ 在不同取值下所对应的升速幅频响应曲线,其余参数 $\beta_2 = \beta_3 = 1, \beta_4 = 5 \times 10^5 \text{ m}^{-2}$ 。考虑到左右轮盘振动规律类似,非线性现象主要发生在系统二阶固有频率处,且二阶、三阶谐波相比一阶谐波幅值过小,因此只绘制轮盘 1 的一阶谐波在其第 2 阶共振频率附近的图像。

模型转子不同参数对响应曲线影响对比如图 10 所示,可知增加偏心量 e 或两轮盘间不平衡量夹角 θ ,减小无量纲阻尼系数 ζ 都会使得第 2 阶共振峰向左方倾斜,并使多解存在的范围扩大。

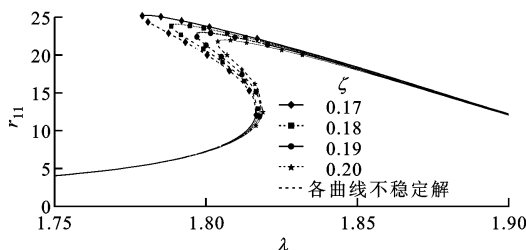
不同质量比时轮盘 1 的幅频响应曲线如图 11 所示,计算参数取值见表 3,其余参数 $\theta = 90^\circ, \beta_2 = 1, \beta_3 = 1$ 。由图 11 中可知,增加质量比会使转子系统第 1 阶、第 2 阶固有频率减小。轮盘 1 第 2 阶无量纲共振幅值随质量比增加而增大。轮盘 2 对应无量



(a) 偏心量的影响



(b) 两盘偏心距夹角的影响



(c) 无量纲阻尼的影响

图 10 模型转子不同参数对响应曲线的影响

纲幅频曲线由于篇幅所限未展示,但其共振时无量纲幅值变化规律与轮盘 1 相反,第 2 阶无量纲共振幅值随质量比的增加而减小。

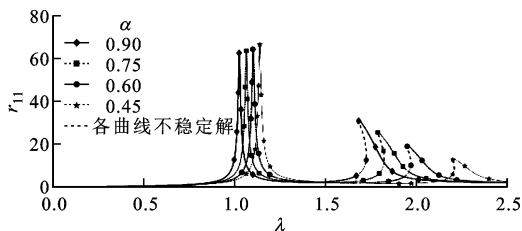


图 11 不同质量比时轮盘 1 的幅频响应曲线

表 3 对比 α 时转子系统的参数取值

组号	α	$e/\mu\text{m}$	$\zeta/10^{-3}$	$\beta_4/10^5 \text{ m}^{-2}$
1	0.45	10	5.7	5
2	0.60	10	5.7	5
3	0.70	10	5.7	5
4	0.90	10	5.7	5

为对比非线性刚度占比 ξ 对振动的影响,取表 4 中参数,其余参数 $\alpha = 0.75, \beta_2 = \beta_3 = 1, \zeta = 5.7 \times$

10^{-3} , 绘制在不同参数组合时轮盘 1 的解响应曲线。非线性刚度占比不同时轮盘 1 的幅频响应曲线如图 12 所示。由图 12 可知:第 2 阶共振峰随着非线性刚度占比的增加向左倾斜,但第 1 阶共振峰几乎未改变,这是因为当两轮盘位移差 x_3 较小时,非线性项 $k_4 x_3^3$ 极小,非线性刚度项几乎不影响整体刚度;随着 x_3 增加, $k_4 x_3^3$ 增加极快,并在第 2 阶临界转速附近取得最大值,刚度变化表现出强非线性。

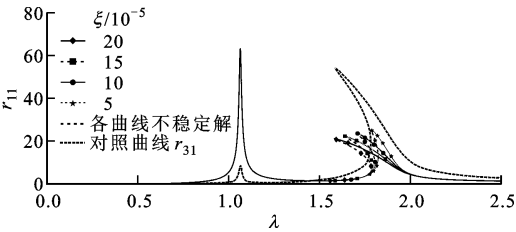


图 12 非线性刚度占比对轮盘 1 幅频响应曲线的影响

共振峰的偏移使系统存在多解的频率范围扩大,进而使振幅不稳定区域扩大。减小轮盘偏心量,两盘偏心量夹角和非线性刚度占比,或者增加无量纲阻尼均能缩减双稳态的存在区域;而改变两轮盘之间的质量比,则能够改变振幅突跳发生的位置。

表 4 对比 ξ 时转子系统的参数取值

组号	α	$\theta/^\circ$	$e/\mu\text{m}$	$\xi/10^{-5}$
1	0.75	90	10	5
2	0.75	90	10	10
3	0.75	90	10	15
4	0.75	90	10	20

3.3.3 结构参数影响分析 结构参数对系统响应的的影响结果可从能量和非线性刚度影响作用强弱的角度进行分析。

(1)由式(15)可知,增加偏心量 e 相当于增加非线性刚度占比 ξ ,同时具有减小拉杆刚度的作用。随着偏心量增加,非线性刚度影响增大但总刚度减小,轮盘 1 的响应曲线不稳定区域即解的双稳态区域变大,第 2 阶固有频率减小。

(2)增加不平衡量夹角会使两轮盘的位移差即 $(r_1 - r_2)$ 增大,进而使得非线性刚度 $k_4 (r_1 - r_2)^3$ 增大,使轮盘 1 二阶固有频率处解存在的双稳态区域扩大。

(3)在外部输入能量不变的情况下,增加无量纲阻尼系数 ζ 使系统在一个周期内被阻尼消耗的能量增加,因而系统响应幅值减小。

(4)由式(15)可知,增加质量比 α 相当于增加轮盘 1 的质量比,解曲线的振幅增加而各阶固有频率

减小。

4 双线性刚度模型

随着轮盘相对位移的变化,图 4 中关系曲线可分成斜率不同的两个部分,变化规律可近似用两段斜率不同的直线表示。假设拉杆和接触面的等效刚度随拉杆的伸长呈线性变化,则对应的回复力为

$$F(s) = \kappa s \tag{22}$$

式中 κ 、 s 分别为拉杆、接触面的等效刚度和拉杆的伸长量。

固定轮盘 1,接触段的横向刚度为

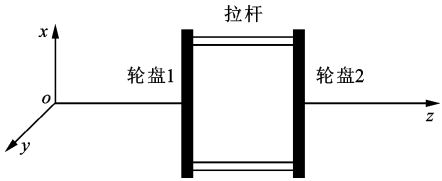
$$k_1 = \frac{dF(s)}{ds_x} \tag{23}$$

式中: s_x 为轮盘 2 的位移在 x 方向上的投影; $F(s)$ 为拉杆受到的拉力。

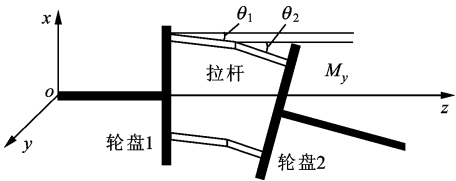
转子受到载荷发生弯曲,拉杆变形的形态如图 13 所示,用一条折线近似描述拉杆的变形。拉杆伸长在 x 方向上的投影为

$$s_x = \begin{cases} s \sin \theta_1, & s \leq s_{cr} \\ s_{cr} \sin \theta_1 + (s - s_{cr}) \sin \theta_2, & s > s_{cr} \end{cases} \tag{24}$$

式中: θ_1 、 θ_2 分别为弯折前、后拉杆与 z 轴的夹角; s_{cr} 为发生弯折时拉杆的伸长量。



(a)未受载荷时接触部位



(b)受外载荷时拉杆弯曲示意图

图 13 拉杆受载荷变形示意图

将式(22)(24)代入式(23)可得

$$k_1 = \begin{cases} \frac{\kappa}{\sin \theta_1}, & s \leq s_{cr} \\ \frac{\kappa}{\sin \theta_2}, & s > s_{cr} \end{cases} \tag{25}$$

用 x 代替 s_x 表示轮盘的横向位移,由式(24)可知等效横向刚度呈双线性,结果如图 14 所示。与有限元刚度计算结果对比可知,两个模型等效回复力曲线相符合,双线性模型可近似反映刚度的变化趋

势,图14中两斜率关系为 $k_{12}=0.8k_{11}$ 。

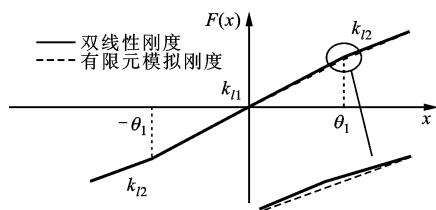


图14 双线性刚度及与有限元模拟刚度对比

4.1 双线性刚度模型动力学方程

设 x_{cr} 为拉杆发生临界弯折时在 x 方向上的伸长量,则

$$x_{cr} = s_{cr} \sin \theta_1 \quad (26)$$

记单个圆盘各方向的横向刚度为

$$k_{li} = \frac{\kappa}{\sin \theta_i}, \quad i = 1, 2 \quad (27)$$

将式(23)(24)代入式(14),得到双线性模型的控制方程组

$$\left. \begin{aligned} r_1'' + \frac{2\zeta_1}{\lambda} r_1' + \frac{2\zeta_3}{\lambda} (r_1' - r_2') + \frac{1}{\lambda^2} r_1 + \frac{\phi(r_1 - r_2)}{\lambda^2} &= \cos(\tau) \\ r_2'' + \frac{2\zeta_2}{\alpha\lambda} r_2' + \frac{2\zeta_3}{\alpha\lambda} (r_1' - r_2') + \frac{\beta_2}{\alpha\lambda^2} r_2 + \frac{\phi(r_1 - r_2)}{\alpha\lambda^2} &= \cos(\tau + \theta) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

定义函数

$$\phi(r) = \begin{cases} \beta_{11} r, & r \leq r_{cr} \\ (\beta_{11} - \beta_{12}) r_{cr} + \beta_{12} r, & r > r_{cr} \end{cases} \quad (29)$$

式中: $r_{cr} = x_{cr}/e$ 为拉杆弯折时的无量纲阈值; $\beta_{1i} = k_{1i}/k_1$ ($i=1,2$)为等效刚度与轮盘1刚度的比值; $\gamma = \beta_{12}/\beta_{11}$ 为弯折前、后刚度的比值。

4.2 转子稳态响应行为分析

取不同转速 Ω ,并使用4阶龙格-库塔方法求解式(28),记录稳态响应幅值。取无量纲阻尼系数 $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 0.01$, $\alpha = 0.75$, $\gamma = 0.7$, $r_{cr} = 10$, $\beta_2 = \beta_{11} = 1$,计算得到无量纲幅频曲线,如图15所示,可知双线性模型无量纲幅频曲线中同样出现了振幅突跳现象。轮盘2的无量纲幅频响应曲线与轮盘1的类似。

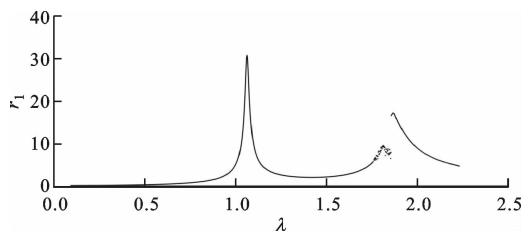
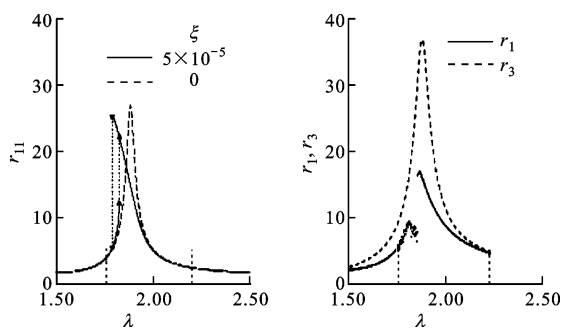


图15 转子双线性模型轮盘1幅频响应曲线

无量纲幅频响应曲线中出现的振幅突跳现象由刚度突变造成。当 r_1 与 r_2 的差值接近 r_{cr} 并且不断增大时,响应曲线先是经历了一个振荡区域,在此范围内,无量纲振幅变化无明显规律;然后无量纲振幅突然增加,通过第二节临界转速后,随着转速增大,无量纲幅值表现出规律性的减小,如图16所示, λ 取值为1.76~2.20。两轮盘位移差值随转速变化图如图17所示,可知当无量纲差值为9.17接近 x_{cr} 时,响应曲线开始变得不稳定。



(a)模型1双稳态区域 (b)模型2不稳定区域

图16 两模型不稳定区域对比

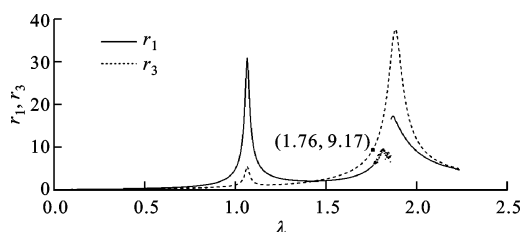


图17 两轮盘位移差值随转速变化图

4.3 三次方刚度模型与双线性刚度模型对比

采用三次方刚度模型和双线性刚度模型对有限元计算结果进行近似并分析其非线性响应,计算结果均表现出振幅突跳现象,且突跳位置基本相同。两模型差别和联系在于:三次方刚度模型的升速和降速幅频曲线振幅突跳发生的位置不同,而两个突跳之间的频段是振幅的双稳态区域。对比两个模型的计算结果得出结论:转子系统刚度非线性变化是影响振幅突跳和致使系统不稳定的原因。

5 结论

本文利用三次方刚度模型和双线性刚度模型近似拉杆和接触面等效横向刚度,分别建立了转子动力学模型,并对两种模型的计算结果进行对比,得到如下结论。

(1)两种近似模型均能模拟拉杆转子的非线性动力学特性,并反映出组合式转子在工作中发生的

振幅突跳现象。

(2)三次方刚度模型的幅频曲线,振幅突跳原因是动力学方程在一定频段存在多解,且存在谐波响应;但其升速和降速幅频曲线发生振幅突跳的位置不同,两突跳之间的区域即双稳态区域。双线性模型中,振幅发生突跳在于刚度发生了突变,并在此之前经历一个不稳定区域,该区域对应前一模型的双稳态区域。

(3)减小轮盘偏心量 e 、两盘偏心量间的夹角 θ ,或者增加无量纲阻尼系数 ζ ,均可使解响应曲线的不稳定区域减小,而改变轮盘质量比 α ,则能够改变此不稳定区域的位置。通过调整系统参数,能有效避免转子系统在不稳定的频率范围内工作。

参考文献:

- [1] GAO J, YUAN Q, LI P. Nonlinear dynamics of the rod-fastened Jeffcott rotor [J]. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 2014, 136(2): 325-325.
- [2] QIN Z Y, HAN Q K, CHU F L. Analytical model of bolted disk-drum joints and its application to dynamic analysis of jointed rotor [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers: Part C Journal of Mechanical Engineering Science, 2014, 228(4): 646-663.
- [3] 刘卓乾, 曹树谦, 郭虎伦, 等. 含螺栓连接转子系统非线性振动特性研究 [J]. 振动与冲击, 2016, 35(22): 10-16.
LIU Zhuoqian, CAO Shuqian, GUO Hulun, et al. Vibration characteristics of rotor systems with bolt joints [J]. Journal of Vibration and Shock, 2016, 35(22): 10-16.
- [4] 钱征文, 程礼, 陈卫, 等. 盘式拉杆转子双稳态振动特性 [J]. 航空动力学报, 2011, 26(7): 1563-1568.
QIAN Zhengwen, CHENG Li, CHEN Wei. Bistable vibration characteristics of disk-rod-fastening rotor with squeeze film damper [J]. Journal of Aerospace Power, 2011, 26(7): 1563-1568.
- [5] HEI Di, LÜ Yangjun, ZHANG Yongfang, et al. Nonlinear dynamic behaviors of a rod fastening rotor supported by fixed-tilting pad journal bearings [J]. Chaos Solitons & Fractals, 2014, 69: 129-150.

- [6] 刘意. 三维复杂盘式拉杆转子轴承系统非线性动力学特性研究 [D]. 西安: 西安交通大学, 2014: 67-92.
- [7] MATISA A A, PENNY J E T, GARVEY S D. The dynamics of bolted and laminated rotors [C]// Proceedings of SPIE. Bellingham, WA, USA: SPIE, 2000: 867-872.
- [8] CVETICANIN L. Resonant vibrations of nonlinear rotors [J]. Mechanism & Machine Theory, 1995, 30(4): 581-588.
- [9] 吴敬东, 侯秀丽, 刘长春, 等. 非线性刚度转子系统主共振解析分析 [J]. 中国机械工程, 2006, 17(5): 539-541.
WU Jingdong, HOU Xiuli, LIU Changchun, et al. Theoretical analysis of characteristics on main resonance of a rotating system with nonlinear stiffness [J]. China Mechanical Engineering, 2006, 17(5): 539-541.
- [10] 赵明, 任平珍, 李继庆, 等. 具有挤压油膜阻尼器的多转子系统双稳态分析 [J]. 推进技术, 2004, 25(1): 66-70.
ZHAO Ming, REN Pingzhen, LI Jiqing, et al. Double static analysis of multi-rotor system with squeeze film damper [J]. Journal of Propulsion Technology, 2004, 25(1): 66-70.
- [11] QIN Z, HAN Q, CHU F. Bolt loosening at rotating joint interface and its influence on rotor dynamics [J]. Engineering Failure Analysis, 2016, 59: 456-466.
- [12] 李乃成, 梅立泉. 数值分析 [M]. 北京: 科学出版社, 2011: 236-237.
- [13] 于平超, 马艳红, 张大义, 等. 具有局部非线性刚度的复杂转子系统动力学模型及振动特性分析 [J]. 推进技术, 2016, 37(12): 2343-2351.
YU Pingchao, MA Yanhong, ZHANG Dayi, et al. Dynamic model and vibration characteristic analysis on complex rotor system with local nonlinear stiffness [J]. Journal of Propulsion Technology, 2016, 37(12): 2343-2351.
- [14] 刘延柱, 陈立群. 非线性振动 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 243-247.
- [15] 闻邦椿, 李以农, 韩清凯. 非线性振动理论中的解析方法及工程应用 [M]. 沈阳: 东北大学出版社, 2001: 236-244.

(编辑 赵炜)